

Санкт-Петербургский государственный университет
Факультет прикладной математики - процессов управления
Кафедра моделирования электромеханических и
компьютерных систем

Петрухин Руслан Романович

Выпускная квалификационная работа бакалавра
**Анализ напряжений в неоднородной плоскости с эллиптическим
отверстием**

Направление 010900 Прикладные математика и физика
ООП Прикладные математика, информатика и физика

Руководитель образовательной программы,
доктор физ.-мат. наук,
профессор

Егоров Н. В.

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Малькова Ю. В.

Рецензент,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент

Костырко С. А.

Санкт-Петербург

2016

Содержание

1	Введение	2
2	Обзор литературы	3
3	Постановка задачи	6
4	Метод суперпозиции	7
5	Решение первой задачи	8
6	Решение второй задачи	9
7	Вывод интегрального уравнения	11
8	Решение интегрального уравнения	12
9	Графики	13
10	Заключение	24

1. Введение

В настоящее время развитие техники предъявляет особые требования к прочности и надежности различных материалов, конструкций и сооружений. Актуально использование композитных материалов, в том числе с различными отверстиями. Важно уметь грамотно рассчитывать возникающие в этих материалах напряжения, чтобы уметь вовремя предотвратить возможное разрушение материала.

В данной работе рассматривается задача определения и анализа напряжений неоднородной пластины с эллиптическим отверстием. Пластина образована соединением двух полуплоскостей из различных материалов, отверстие расположено целиком в нижней полуплоскости. На бесконечности заданы постоянные напряжения.

Для решения задачи использовался метод суперпозиции и метод комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили [1–3]. Задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и для разрешения уравнения использовался численный метод коллокаций. Выполнены расчеты напряжений на линии раздела для различных параметров упругости полуплоскостей, различного расстояния центра эллипса от линии раздела, а также ориентации эллипса в плоскости. Из рассматриваемой задачи вытекают частные случаи, такие как задача о круговом отверстии в двухкомпонентной плоскости, задача о наклонной трещине в двухкомпонентной плоскости и другие.

2. Обзор литературы

Вопросу влияния отверстий и включений в неоднородную плоскость на распределение напряжений уделено значительное внимание в литературе.

В работе [4] рассматривается неограниченный, однородный, ортотропный упругий композитный материал, содержащий эллиптическое отверстие, подверженный равномерному удаленному растяжению и касательным нагрузкам сдвига. Используя конформное отображение и представление напряжений и смещений полей с помощью комплексных потенциалов, решение было найдено в компактной и элементарной форме. Когда меньшая полуось эллиптического отверстия стремится к нулю, т. е. отверстие становится трещиной, потенциалы сводятся к виду, подобному выражению потенциалов в задаче о трещине, которые можно получить в результате решения соответствующей задачи Римана — Гильберта.

Решение проблемы упругой полуплоскости с круговым отверстием рассмотрено в работе [5]. Используя конформное отображение, искомую область переносили в кольцевую область, где аналитические функции можно разложить в ряд Лорана. Коэффициенты ряда Лорана были определены с помощью граничных условий и условий несходимости ряда. В качестве примера, один из туннелей метро был проанализирован с помощью этого метода.

Проблема точечной дислокации, взаимодействующей с эллиптическим отверстием на границе раздела двух соединенных полуплоскостей, была изучена в работе [6]. Комплексные потенциалы получены путем применения методов комплексной переменной и конформного отображения. Решение может служить как функция Грина для изучения внутренних трещин, взаимодействующих с эллиптическим отверстием.

В работе [7] рассматривается проблема полубесконечной, изотропной, линейно вязкоупругой полуплоскости, содержащей множественные не перекрывающиеся круглые отверстия. Размеры и расположение отверстий произвольны. Постоянное или зависящее от времени напряжение действует параллельно границе полуплоскости. Границы отверстий подвергаются равномерному давлению. Решение поставленной задачи основано на использовании принципа соответствия. Для получения основного уравнения используется преобразование Лапласа. Неизвестные смещения на границах отверстий аппроксимируются усеченными рядами Фурье. Система линейных уравнений получается при использовании разложения в ряды Тейлора. Вязкоупругие напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости могут быть найдены с помощью вязкоупругих

аналогов комплексных потенциалов Колосова — Мухелишвили. Решение во временной области получают путем применения обратного преобразования Лапласа. Все операции интегрирования, преобразования Лапласа и его инверсии выполняются аналитически. Точность и эффективность метода продемонстрированы путем сравнения с решениями, полученными с помощью программного обеспечения ANSYS.

Комплексный метод граничных интегральных уравнений, в сочетании с методом аналитического продолжения, использован в работе [8] для решения задачи бесконечной изотропной упругой плоскости, содержащей несколько круглых отверстий. Нагрузка задается на бесконечности или на границах отверстий. Размеры и расположение отверстий произвольны при условии, что они не перекрывают друг друга. Процедура решения основана на использовании комплексного гиперсингулярного интегрального уравнения. Неизвестные перемещения на каждой круговой границе представлены усеченными комплексными рядами Фурье, и все интегралы, участвующие в комплексном интегральном уравнении, вычисляются аналитически. Система линейных алгебраических уравнений получается с помощью разложения в ряды Тейлора, и для решения системы используется алгоритм Гаусса — Зейделя.

В работе [9] исследуется вопрос взаимодействия полостей в бесконечной упругой среде. В горнодобывающей промышленности интерес к проблемам этого типа в основном происходит из-за перемещений, которые происходят на поверхности почвы, что может нанести значительный ущерб. Подобное повреждение может произойти при строительстве туннелей в густонаселенных районах. Полученные аналитические выражения для оседания, как правило, не очень хорошо согласуются с результатами измерений на местах. Одним из возможных объяснений расхождения между ними является взаимодействие туннелей. Простое наложение эффектов каждого туннеля может дать неплохие результаты, если расстояние между туннелями велико, но не тогда, когда туннели построены близко друг к другу. Для того, чтобы получить более глубокое представление о взаимодействии, представлено аналитическое решение для бесконечной упругой среды. Сравнение решения с двумя компьютерными программами, FLAC 2D и PLAXIS, подтверждает вывод о том, что взаимодействие круглых отверстий в самом деле вызывает увеличение смещений.

Для анализа межфазных трещин в двухкомпонентной пластине в работе [10] применялся метод коллокаций. Было показано, что предполагаемый метод эффективен и дает удовлетворительные результаты. Кроме того, предлагаемый подход показывает много преимуществ по сравнению с другими методами и может быть использован для

исследования более общих случаев трещин, выходящих из отверстия в двухкомпонентной пластине.

Проблема связи напряжений вызванных наличием трещины или эллиптического отверстия вблизи прямоугольного выреза в бесконечной пластине, с заданными напряжениями на бесконечности исследуется в работе [11]. Эта проблема имеет важное значение в пассажирских самолетах, когда трещина находится в непосредственной близости от двери. Коэффициенты концентрации напряжений вблизи отверстия и вблизи вершины трещины оцениваются для различных ориентаций трещин, различной длины и расстояния трещины от отверстия. В этом анализе две комплексные функции напряжений найдены с помощью метода последовательных приближений Шварца.

Вообще же методы теории функции комплексной переменной, такие как использование комплексных потенциалов и метод конформного отображения, широко применяются при решении плоских задач теории упругости. В частности, они используются в работах [12–19].

3. Постановка задачи

Рассматривается плоскость S , состоящая из двух полуплоскостей S_1 и S_2 , выполненных из разных материалов. В декартовых координатах (x_1, x_2) прямая $x_2 = 0$ является линией раздела полуплоскостей. Отверстие расположено целиком в нижней полуплоскости S_1 . Центр эллипса находится на расстоянии H от оси x_1 . С эллипсом L свяжем другую систему декартовых координат (y_1, y_2) с началом в центре эллипса, оси которых направлены вдоль осей эллипса и составляют угол α с координатами (x_1, x_2) , рис. 1.

В декартовых координатах (x_1, x_2) компоненты напряжений и перемещений обозначим σ_{ij} и u_i , а в декартовых координатах (y_1, y_2) — s_{ij} и v_i , $i, j = 1, 2$.

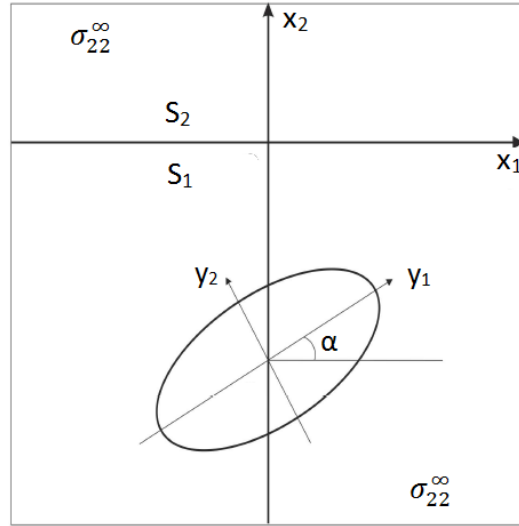


Рис. 1. Двухкомпонентная плоскость с эллиптическим отверстием.

На бесконечности заданы растягивающие напряжения либо $\sigma_{22}^{1\infty} = \sigma_{22}^{2\infty} = p$, либо $\sigma_{11}^{1\infty} = \sigma_{11}^{2\infty} = p$.

На линии раздела полуплоскостей $x_2 = 0$ заданы условия упругого сопряжения

$$[\sigma_{22} - i\sigma_{21}]^+(x_1) = [\sigma_{22} - i\sigma_{21}]^-(x_1),$$

$$[u'_1 + iu'_2]^+(x_1) = [u'_1 + iu'_2]^-(x_1).$$

Контур эллипса L свободен от напряжений

$$[s_{nn} + is_{nt}]^+(c) = 0,$$

где s_{nn} и s_{nt} — компоненты тензора напряжений в базисе нормали и касательной к контуру отверстия, c — точки эллипса в системе координат (y_1, y_2) на L .

4. Метод суперпозиции

Будем строить решение исходной задачи в виде суммы решений двух частных задач: первой является задача для двухкомпонентной плоскости со скачками напряжений и перемещений на линии раздела полуплоскостей и заданными условиями на бесконечности, второй — задача для однородной плоскости с эллиптическим отверстием, напряжения на бесконечности отсутствуют [3].

Напряжения и перемещения запишем в следующей форме

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_1 + (\sigma_{ij})_2, & u_i &= (u_i)_1 + (u_i)_2, & z &\in S_1, \\ \sigma_{ij} &= (\sigma_{ij})_1, & u_i &= (u_i)_1, & z &\in S_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где индексами 1 и 2 отмечены решения первой и второй частных задач, соответственно.

Для первой задачи на линии раздела полуплоскостей $x_2 = 0$ имеем условия

$$\begin{aligned}[(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1]^+(x_1) - [(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1]^-(x_1) &= \Delta\sigma(x_1), \\ [(u'_1 + iu'_2)_1]^+(x_1) - [(u'_1 + iu'_2)_1]^-(x_1) &= \Delta u'(x_1),\end{aligned}\tag{2}$$

где $\Delta\sigma(x_1)$ и $\Delta u'(x_1)$ — неизвестные функции скачков.

Для второй задачи на контуре эллипса L будет условие

$$[(s_{nn} + is_{nt})_2]^+(c) = q(c),\tag{3}$$

где $q(c)$ — неизвестная функция.

С учетом (1) граничные условия запишутся в виде

$$\begin{aligned}[(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1]^+(x_1) &= [(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_1 + (\sigma_{22} - i\sigma_{21})_2]^-(x_1), \\ [(u'_1 + iu'_2)_1]^+(x_1) &= [(u'_1 + iu'_2)_1 + (u'_1 + iu'_2)_2]^-(x_1), \\ [(s_{nn} + is_{nt})_1 + (s_{nn} + is_{nt})_2]^+(c) &= 0.\end{aligned}$$

Путем преобразований с помощью формул (2), (3) получим систему из трех уравнений для определения трех неизвестных функций [20]

$$\begin{aligned}[(\sigma_{22} - i\sigma_{21})_2]^-(x_1) &= \Delta\sigma(x_1), \\ [(u'_1 + iu'_2)_2]^-(x_1) &= \Delta u'(x_1), \\ [(s_{nn} + is_{nt})_1]^+(t) &= -q(t).\end{aligned}\tag{4}$$

5. Решение первой задачи

Подробное изложение данной задачи имеется в работе [2]. Здесь приведем общую суть решения. Представим напряжения и перемещения через комплексные потенциалы Колосова — Мусхелишвили:

$$(\sigma_{22} - i\sigma_{21}) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)},$$

$$2\mu(u'_1 + iu'_2) = \kappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)},$$

и введем комплексную функцию:

$$\Omega(z) = \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}.$$

Тогда можно выразить комплексные потенциалы через две функции $h(z)$ и $r(z)$:

$$\Phi_2(z) = \frac{\mu_2 h(z) + r(z)}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}, \quad \Omega_1(z) = -\frac{\mu_1 \kappa_2 h(z) - r(z)}{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}, \quad z \in S_2,$$

$$\Phi_1(z) = \frac{\mu_1 h(z) + r(z)}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}, \quad \Omega_2(z) = -\frac{\mu_2 \kappa_1 h(z) - r(z)}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}, \quad z \in S_1,$$

причем $h(z)$ и $r(z)$ — это решения граничных задач Римана — Гильберта:

$$h^+(x_1) - h^-(x_1) = \Delta\sigma(x_1), \quad r^+(x_1) - r^-(x_1) = 2\mu_1\mu_2\Delta u'(x_1),$$

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\sigma(x_1) dx_1}{x_1 - z} + h(\infty), \\ r(z) &= \frac{\mu_1\mu_2}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta u'(x_1) dx}{x_1 - z} + r(\infty). \end{aligned} \tag{5}$$

Постоянные $h(\infty)$ и $r(\infty)$ находятся из условий на бесконечности, их значения приведены в [2].

6. Решение второй задачи

Для решения второй задачи для начала воспользуемся конформным отображением области с эллиптическим отверстием на внешность круга единичного радиуса

$$y = \omega(\zeta) = R(\zeta + m\zeta^{-1}); \quad R > 0, \quad 0 \leq m < 1, \quad \zeta = re^{i\theta}.$$

Тогда контур эллипса L перейдет в контур окружности L' .

Для сил имеют место следующие соотношения, связывающие их с напряжениями и комплексными потенциалами

$$f_1 + if_2 = i \int_0^s (s_{n1} + is_{n2}) ds + \text{const},$$

$$f_1 + if_2 = \varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)},$$

здесь f_1, f_2 — проекции главного вектора сил на оси (y_1, y_2) , вычисленные по внешним усилиям вдоль дуги s , причем внешние усилия будут связаны с напряжениями в криволинейных координатах по формуле

$$s_{n1} + is_{n2} = (s_{rr} + is_{r\theta}) e^{i\gamma} = (s_{rr} + is_{r\theta}) \frac{\zeta \omega'(\zeta)}{|\zeta \omega'(\zeta)|}.$$

Комплексные потенциалы определяются из граничной задачи

$$\varphi(t) + \frac{\omega(t)}{\omega'(t)} \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = (f_1 + if_2)(t) = f(t), \quad t = e^{i\theta}.$$

Решение этой задачи [1] таково

$$\varphi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{L'} \frac{f(t) dt}{t - \zeta}, \quad \psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{L'} \frac{\overline{f(t)} dt}{t - \zeta} - \zeta \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \varphi'(\zeta) + \psi(\infty),$$

величина $\psi(\infty)$ является постоянной и не влияет на распределение напряжений, а величина $f(t)$ будет определяться равенством

$$f(t) = i \int_0^s q(t) e^{i\gamma} ds = i \int_0^\theta q(t) e^{i\gamma} |\omega'(t)| d\theta.$$

В дальнейшем нам понадобятся комплексные потенциалы $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, которые связаны с потенциалами $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ соотношениями

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) = \varphi'(\zeta), \quad \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) = \psi'(\zeta),$$

и будут соответственно определяться по формулам

$$\begin{aligned}
\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{L'} q(t)\omega'(t) \frac{dt}{t-\zeta}, \\
\omega'(\zeta)\Psi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{L'} \overline{q(t)\omega'(t)} \frac{dt}{t^2(t-\zeta)} - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} \Phi'(\zeta) + \frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m} \Phi(\zeta).
\end{aligned} \tag{6}$$

7. Вывод интегрального уравнения

С учетом решений двух частных задач система уравнений (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)} + \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right] e^{2i\alpha} &= \Delta\sigma(x_1), \\ \varkappa_1 \Phi(\zeta) - \overline{\Phi(\zeta)} - \left[\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} \right] e^{2i\alpha} &= 2\mu_1 \Delta u'(x_1), \\ \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \left[\overline{\Phi_1(z)} - \Omega_1(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi'_1(z)} \right] e^{-2i(\alpha+\gamma)} &= -q(t),\end{aligned}$$

где ζ принимает значения на линии раздела $x_2 = 0$, а z принимает значения на окружности L' .

Подставив первые два уравнения системы в выражение (5), вычислив интегралы типа Коши и введя дополнительные обозначения

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 \varkappa_1}, \quad A_2 = \frac{\mu_2 \varkappa_1 - \mu_1 \varkappa_2}{\mu_2 + \mu_1 \varkappa_2}, \\ \omega(\zeta) &= (z + iH)e^{-i\alpha}, \quad \omega(\zeta_1) = (\bar{z} + iH)e^{-i\alpha}, \\ G &= \Phi(\zeta_1) + \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta_1)} \overline{\Phi'(\zeta_1)} + \overline{\Psi(\zeta_1)} \right] e^{-2i\alpha},\end{aligned}$$

получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода для функции $q(t)$

$$\begin{aligned}A_1 (\overline{G} + G) + (A_1 \overline{G} + A_2 \Phi(\zeta_1)) e^{-2i(\alpha+\gamma)} - A_1 (z - \bar{z}) \frac{e^{-3i\alpha-2i\gamma}}{\omega'(\zeta_1)} \times \\ \times (\Phi'(\zeta_1) + G'_{\zeta_1}) = q(t) + 0,5(\sigma_{22}^\infty + \sigma_{11}^\infty) - 0,5(\sigma_{22}^\infty - \sigma_{11}^\infty) e^{-2i(\alpha+\gamma)},\end{aligned}$$

где функции $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ определяются по формулам (6), а переменные ζ , ζ_1 и z принимают свои значения на окружности L' .

8. Решение интегрального уравнения

Для решения полученного интегрального уравнения воспользуемся численным методом коллокаций [21]. Для этого положим

$$\omega'(t)q(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k t^k + \sum_{i=k}^n b_k t^{-k}, \quad (7)$$

основываясь на том факте, что аналитическую функцию можно представить в виде ряда Лорана по степеням t .

Главный вектор сил на контуре отверстия определяется по формуле

$$F = \oint_{L'} \omega'(t)q(t) dt = 2\pi i b_1.$$

Так как по условию он равен нулю, следовательно, коэффициент $b_1 = 0$.

Используя разложение (7), запишем получаемые значения комплексных потенциалов $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta)\Phi(\zeta) &= \sum_{k=2}^n b_k \zeta^{-k}, \\ \omega'(\zeta)\Psi(\zeta) &= -\sum_{k=0}^n \bar{a}_k \zeta^{-k-2} - \zeta \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m} \Phi'(\zeta) + \frac{1-m\zeta^2}{\zeta^2-m} \Phi(\zeta). \end{aligned}$$

Построив равномерную сетку на окружности L' и подставив узлы сетки в интегральное уравнение, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_k, b_k .

Для разрешения уравнения была написана программа в среде Matlab. Ниже представлены полученные графики для напряжений на границе раздела двух сред.

Напряжения на границе можно рассчитать по формуле

$$\sigma_{22} - i\sigma_{12} = (\sigma_{22} - i\sigma_{12})^\infty + \frac{\mu(1+\varkappa_1)}{\mu + \varkappa_1} \Phi(\zeta) + \frac{\mu(1+\varkappa_1)}{1 + \mu\varkappa_1} \bar{G}.$$

9. Графики

Были выполнены расчеты напряжений на линии раздела полуплоскостей для различных параметров задачи. При произвольно выбираемых материалах нельзя поставить задачу растяжения напряжениями σ_{22}^∞ и при этом считать, что $\sigma_{11}^\infty = 0$ [2]. Но если предположить, что между параметрами материалов существует связь, то эту задачу можно рассматривать. Поэтому далее рассмотрим несколько вариантов расчетов напряжений.

Случай 1. Осуществим растяжение плоскости напряжениями $\sigma_{22}^\infty = p$ вдоль оси x_2 . Полуоси эллипса $a = 3$, $b = 1$. Параметры материала: $\kappa_1 = 1.8$, $\kappa_2 = 3 - 1.2\mu$, $\mu = \mu_2/\mu_1$ — отношение модулей сдвига. Пунктирной линией на графиках (рис. 2–7) отмечены напряжения при отношении модулей сдвига $\mu = 3/2$, сплошной — $\mu = 2/3$.

Случай 2. Осуществим растяжение плоскости напряжениями $\sigma_{11}^\infty = p$ вдоль оси x_1 . Полуоси эллипса $a = 3$, $b = 1$. Параметры материала: $\kappa_1 = 1.8$, $\kappa_2 = \mu(1 + \kappa_1) - 1$. Пунктирной линией на графиках (рис. 8–13) отмечены напряжения при отношении модулей сдвига $\mu = 6/7$, сплошной — $\mu = 7/6$. К сожалению, налагаемые ограничения сужают возможность выбора значений для параметра μ . При растяжении напряжениями $\sigma_{11}^\infty = p$ величины напряжений в случае, когда отверстие расположено в более мягкой среде и в более жестком материале отличаются незначительно. Отметим также, что по сравнению с предыдущим случаем, характер кривых изменяется.

Случай 3. Как и в первом случае осуществим растяжение плоскости напряжениями $\sigma_{22}^\infty = p$ вдоль оси x_2 . Полуоси эллипса $a = 3$, $b = 1$. Но отличие будет в том, что коэффициенты Пуассона у двух полуплоскостей возьмем равными, из чего также следует равенство параметров κ_1 и κ_2 . Возьмем параметры материала $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$. В таком случае также нужно задать растяжение плоскости напряжениями $\sigma_{11}^\infty = \sigma_{22}^\infty \frac{1 + \kappa_2 - \mu(1 + \kappa_1) + 4(\mu - 1)}{\mu(1 + \kappa_1) - (1 + \kappa_2)}$. Связь между напряжениями σ_{11}^∞ и σ_{22}^∞ позволяет произвольно задавать отношение модулей сдвига. Пунктирной линией на графиках (рис. 14–19) отмечены напряжения при отношении модулей сдвига $\mu = 3$, сплошной — $\mu = 1/3$. Видно, что при данном варианте нагружения для величин напряжений более важно, в мягком или жестком материале находится отверстие, чем в случае 1.

Случай 4. Осуществим растяжение плоскости напряжениями $\sigma_{22}^\infty = p$ вдоль оси x_2 . Полуоси эллипса $a = 3$, $b = 0.1$. В таком случае форма эллипса приближается к трещине. Параметры материала: $\kappa_1 = \kappa_2 = 1.8$. Также происходит растяжение плос-

кости напряжениями σ_{11}^∞ , как и в третьем случае. Пунктирной линией на графиках (рис. 20–26) отмечены напряжения при отношении модулей сдвига $\mu = 3$, сплошной — $\mu = 1/3$. Сжатие эллипса приводит к увеличению величины нормальных и касательных напряжений, если эллиптическое отверстие находится в более мягкой среде.

Случай 5. Рассмотрим частный случай эллипса — окружность. Осуществим растяжение плоскости напряжениями $\sigma_{22}^\infty = p$ вдоль оси x_2 . Параметры материала: $\kappa_1 = 1.8$, $\kappa_2 = 3 - 1.2\mu$. Пунктирной линией на графиках (рис. 27–29) отмечены напряжения при отношении модулей сдвига $\mu = 3/2$, сплошной — $\mu = 2/3$.

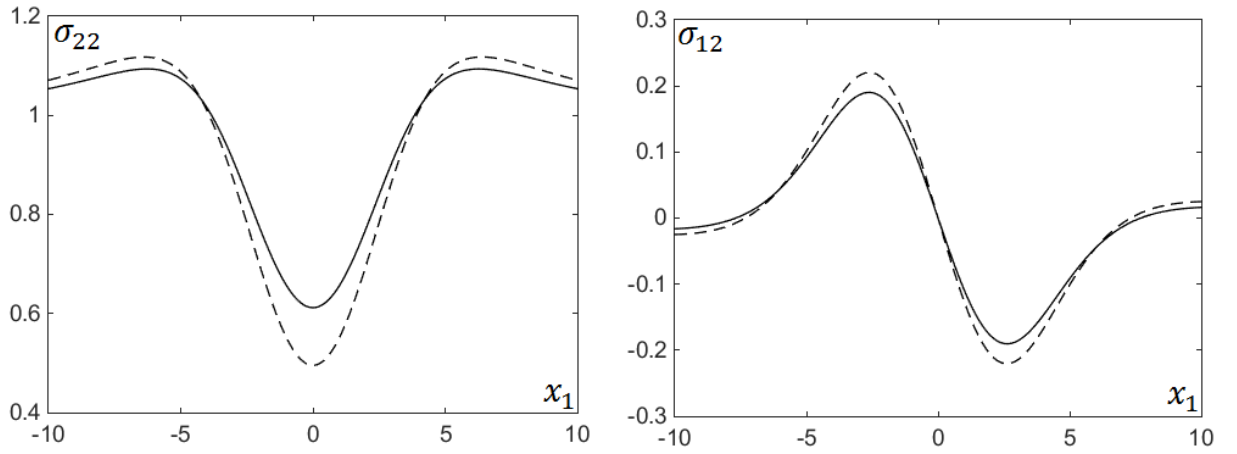


Рис. 2. $H = 5$, $\alpha = 0$.

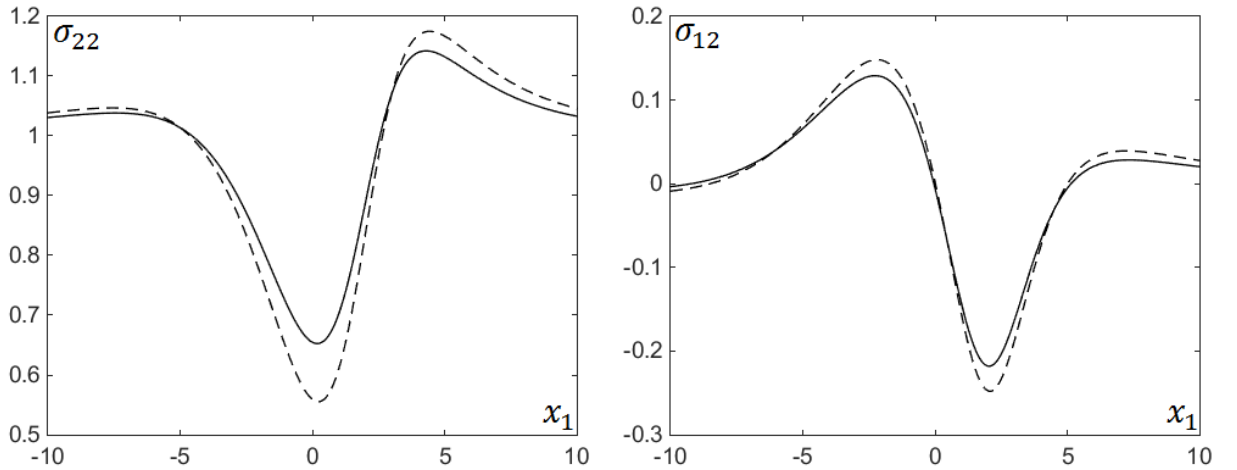


Рис. 3. $H = 5$, $\alpha = \pi/4$.

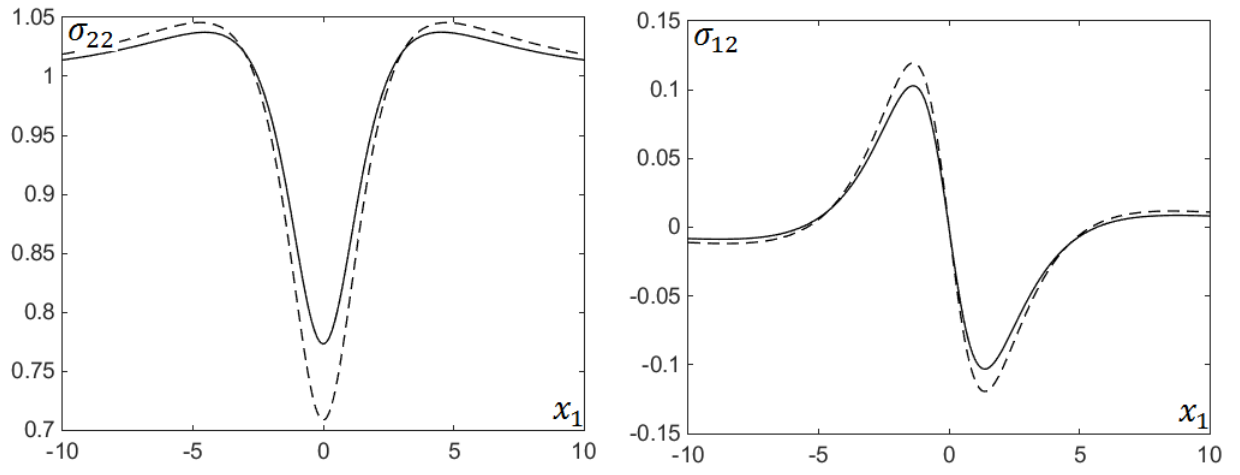


Рис. 4. $H = 5$, $\alpha = \pi/2$.

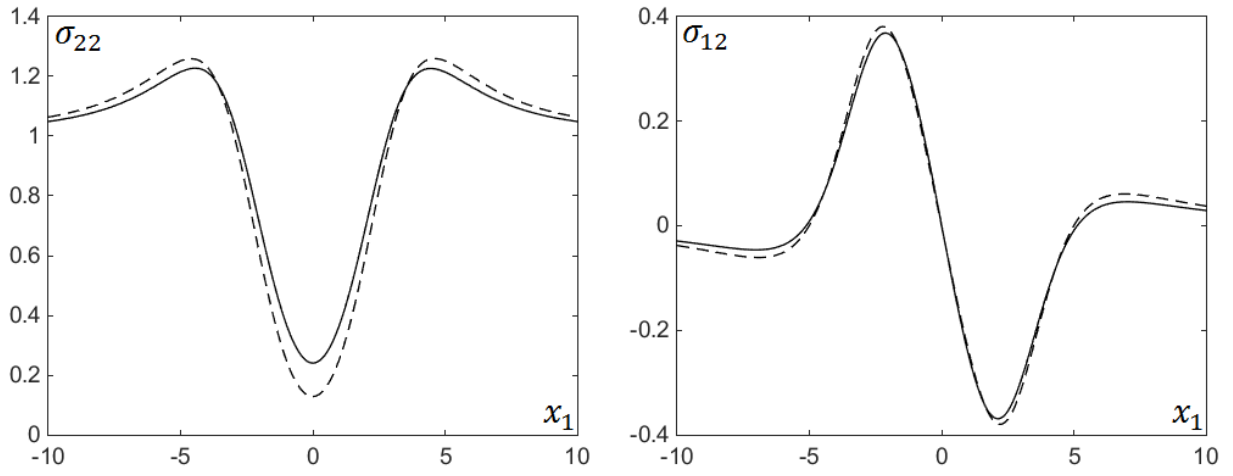


Рис. 5. $H = 3$, $\alpha = 0$.

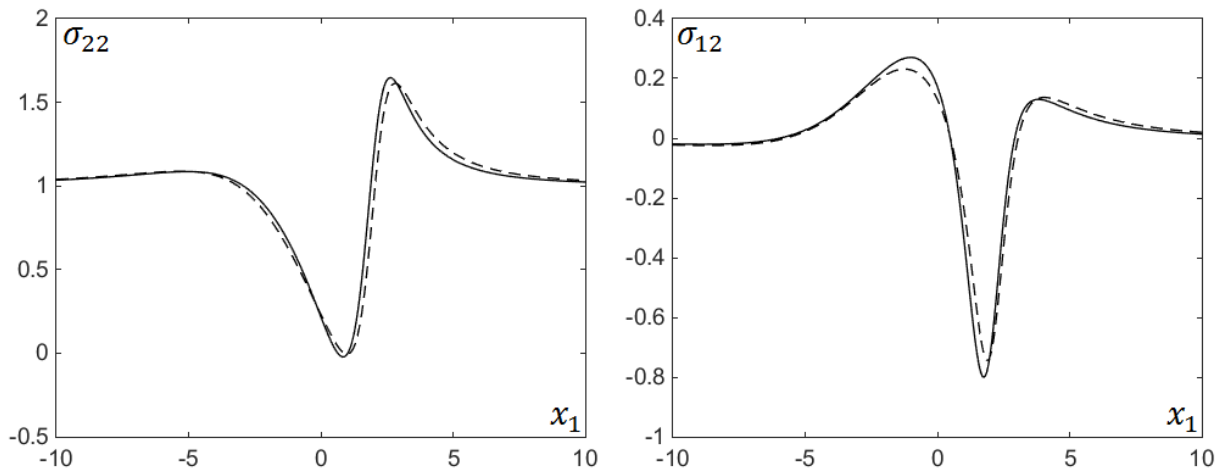
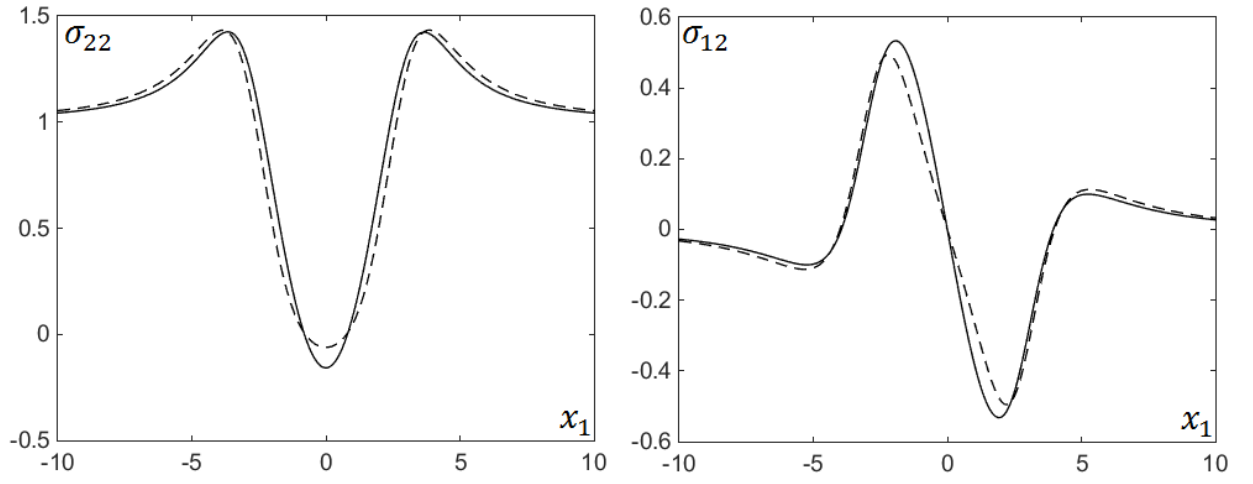
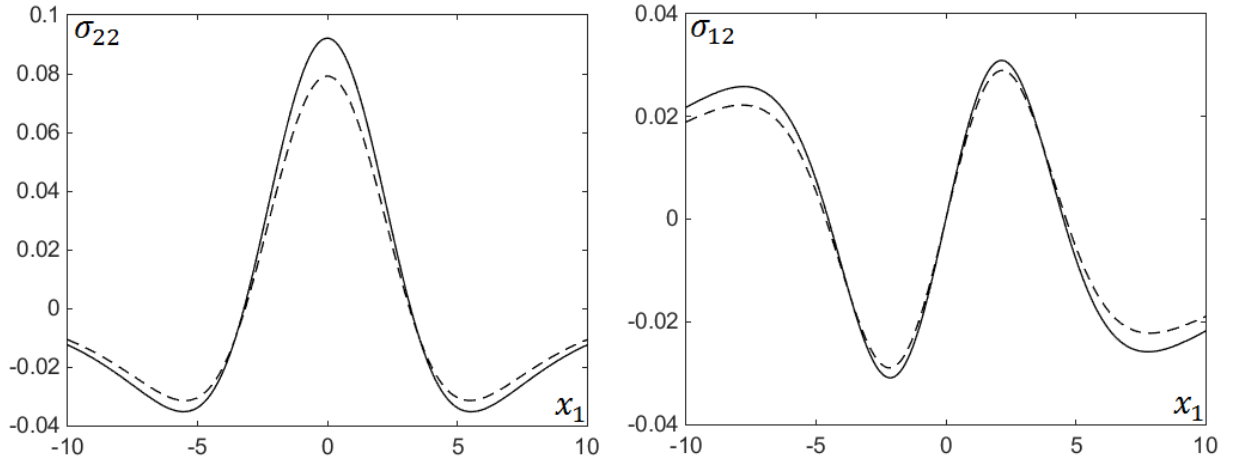


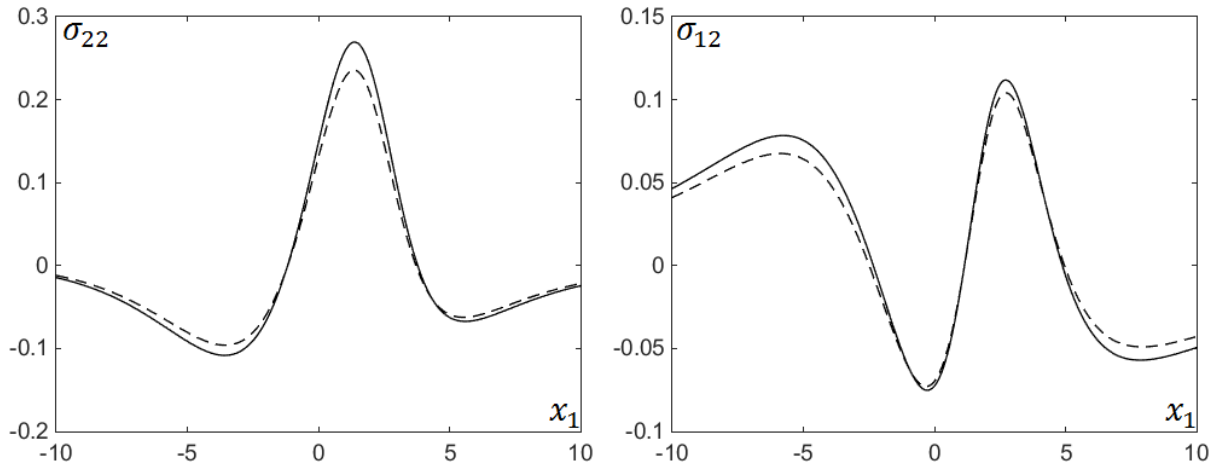
Рис. 6. $H = 3$, $\alpha = \pi/4$.



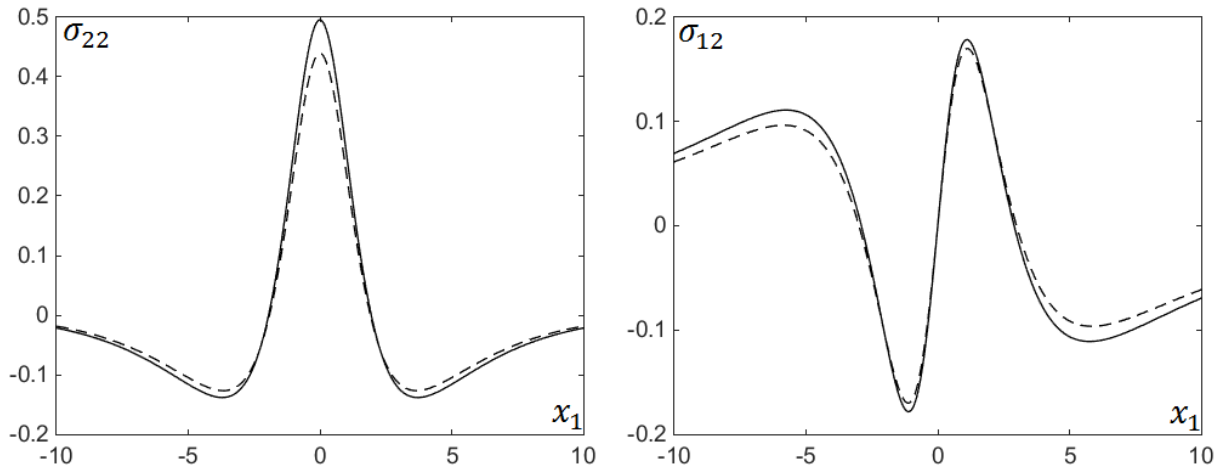
Puc. 7. $H = 2.01$, $\alpha = 0$.



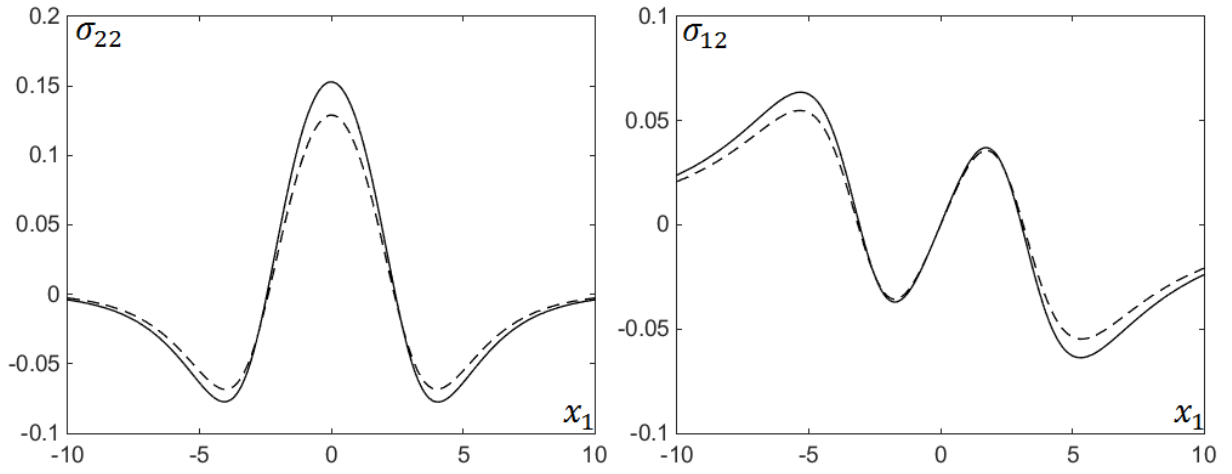
Puc. 8. $H = 5$, $\alpha = 0$.



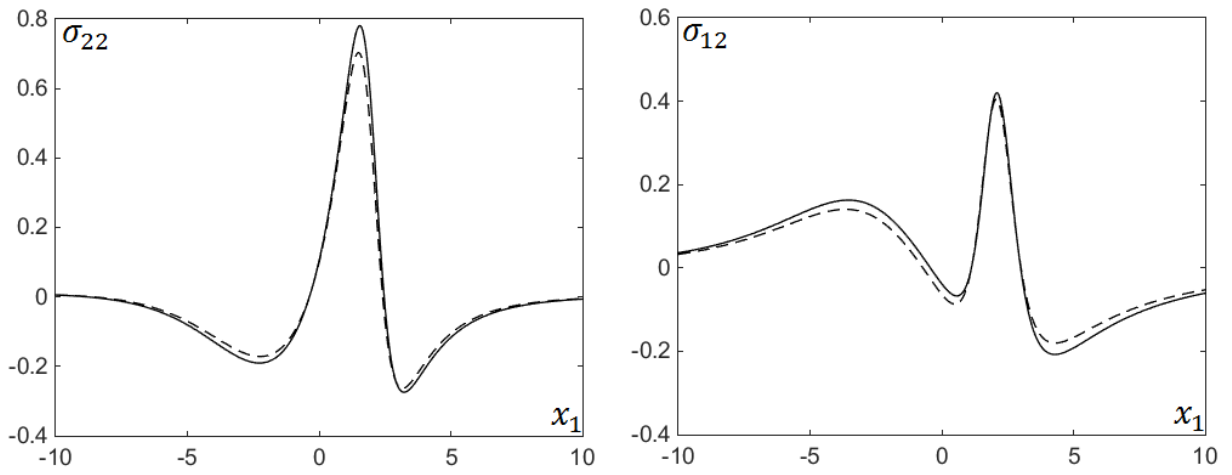
Puc. 9. $H = 5$, $\alpha = \pi/4$.



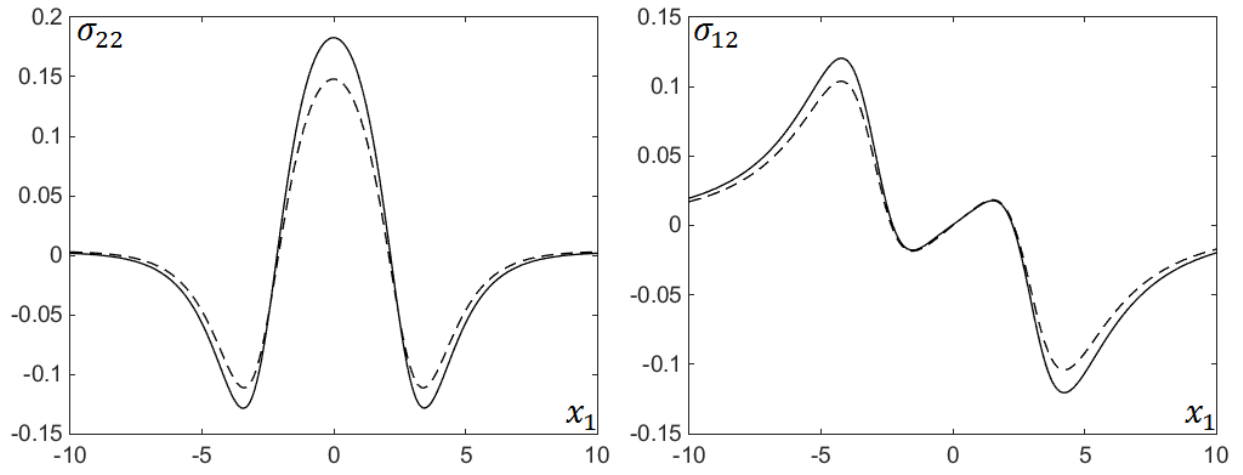
Puc. 10. $H = 5$, $\alpha = \pi/2$.



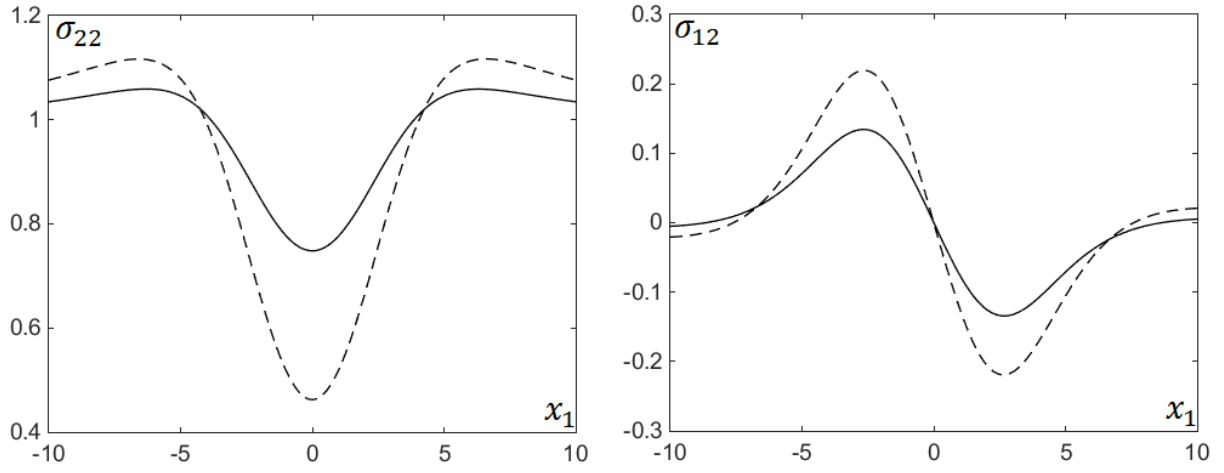
Puc. 11. $H = 3$, $\alpha = 0$.



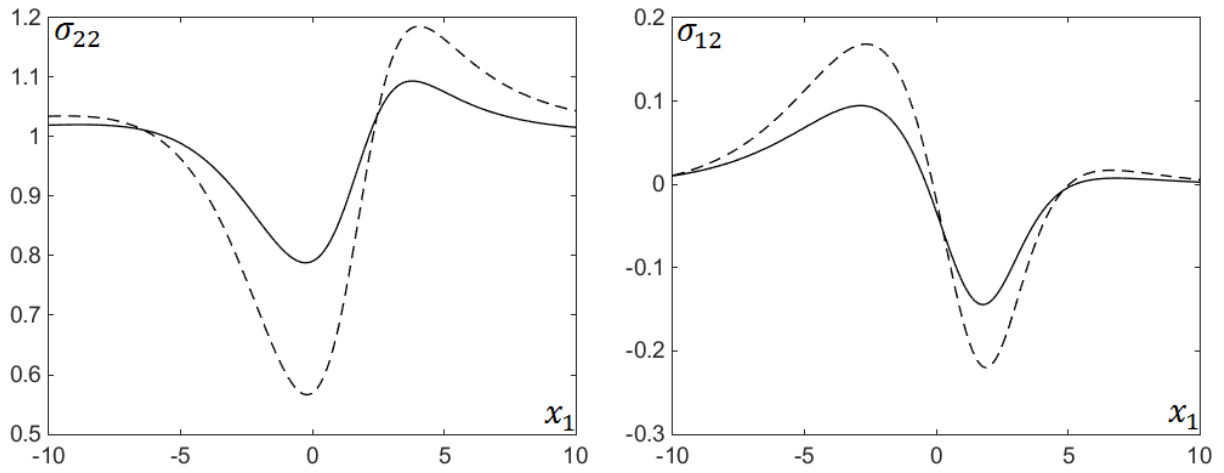
Puc. 12. $H = 3$, $\alpha = \pi/4$.



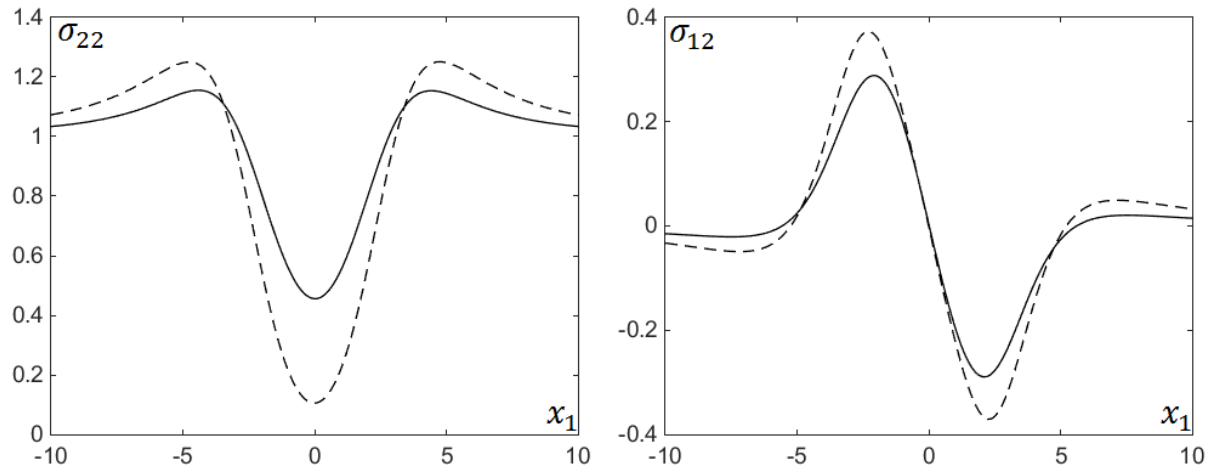
Puc. 13. $H = 2.01$, $\alpha = 0$.



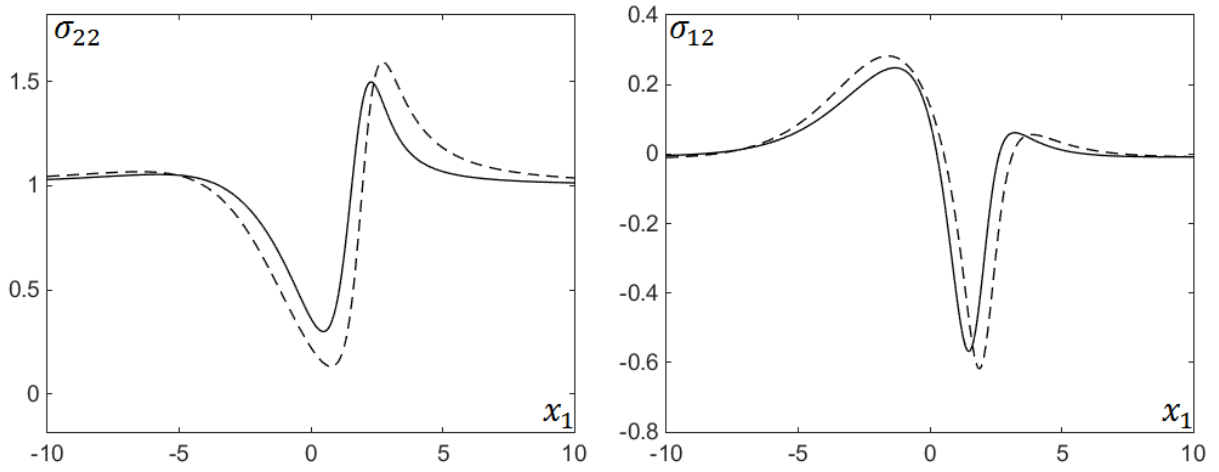
Puc. 14. $H = 5$, $\alpha = 0$.



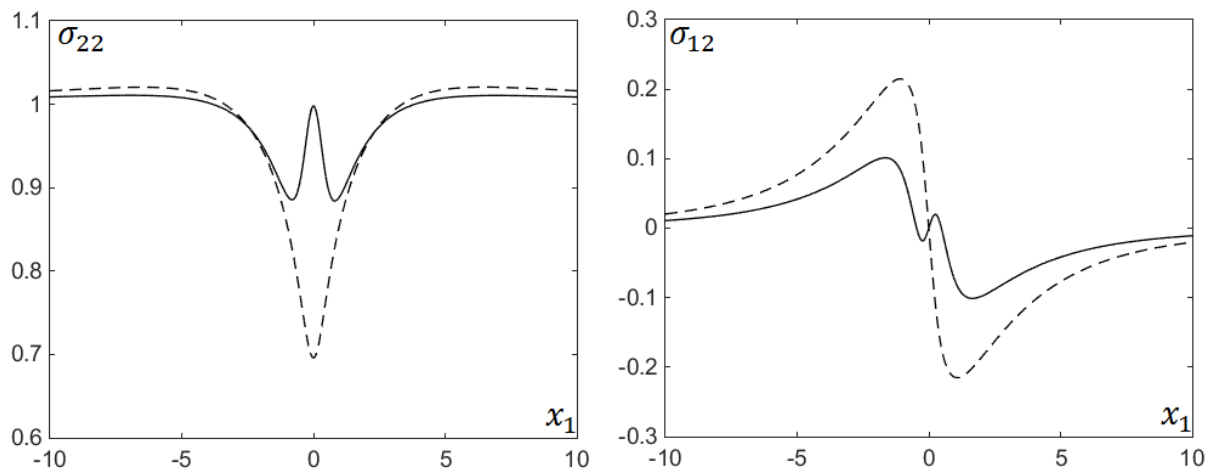
Puc. 15. $H = 5$, $\alpha = \pi/4$.



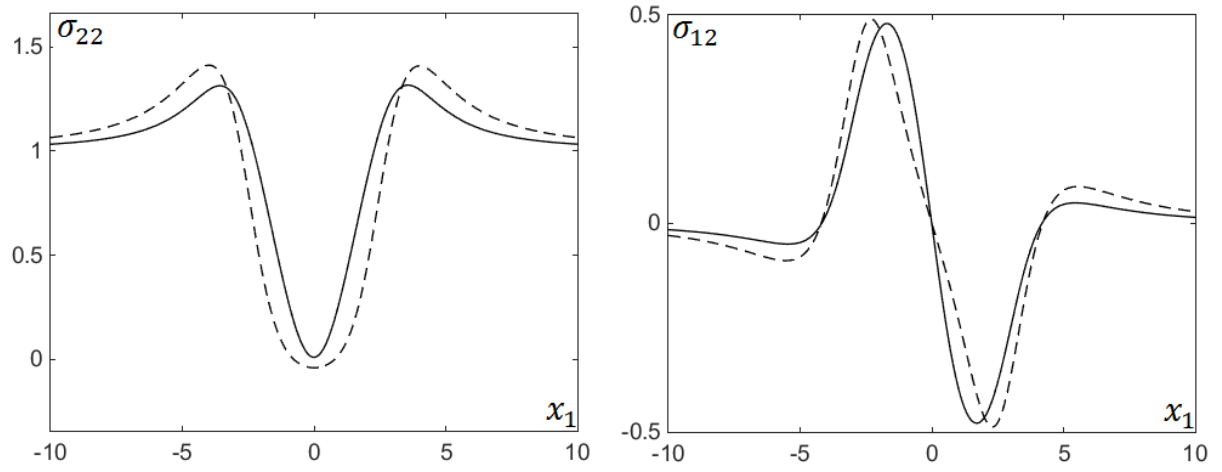
Puc. 16. $H = 3$, $\alpha = 0$.



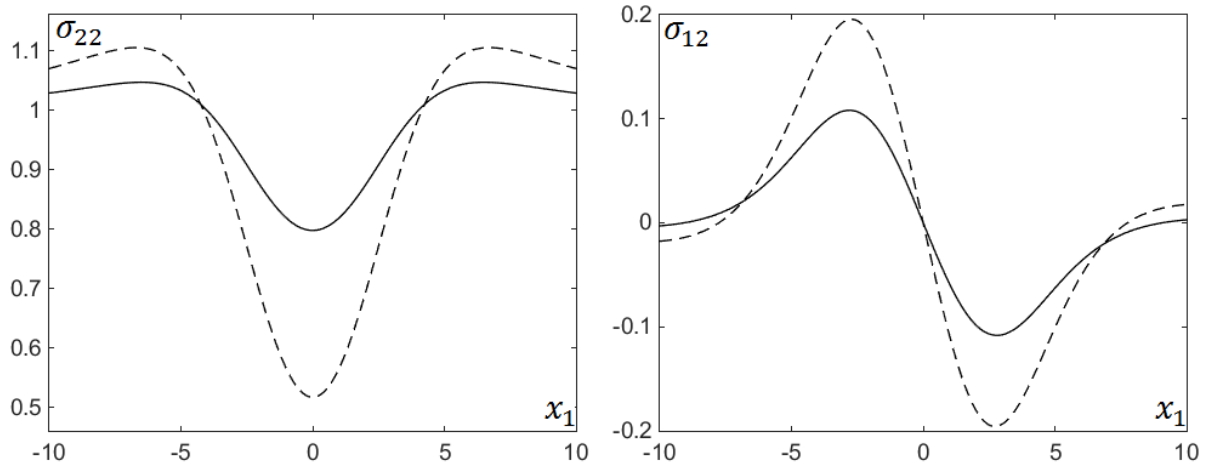
Puc. 17. $H = 3$, $\alpha = \pi/4$.



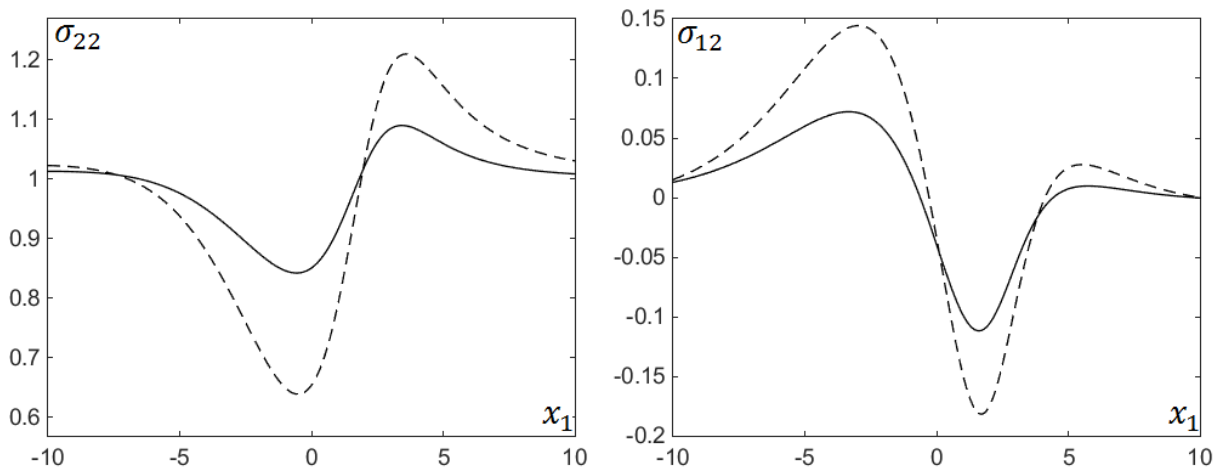
Puc. 18. $H = 3.5$, $\alpha = \pi/2$.



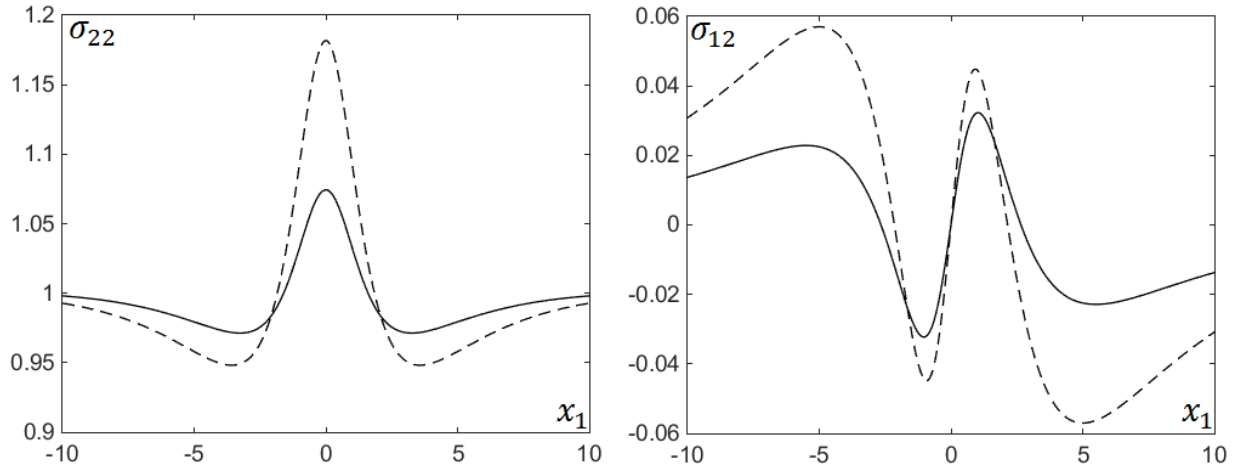
Puc. 19. $H = 2.01$, $\alpha = 0$.



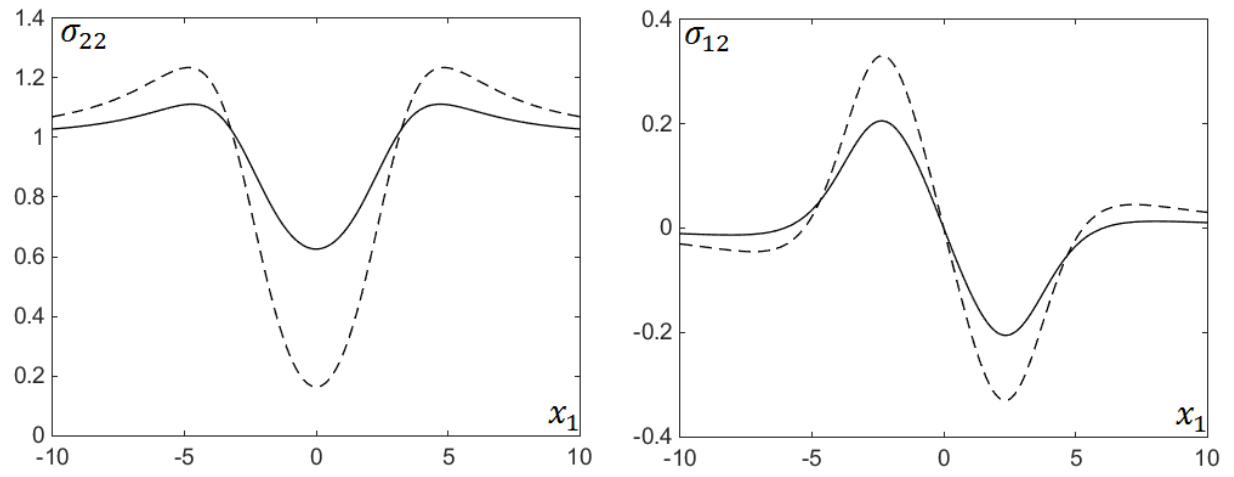
Puc. 20. $H = 5$, $\alpha = 0$.



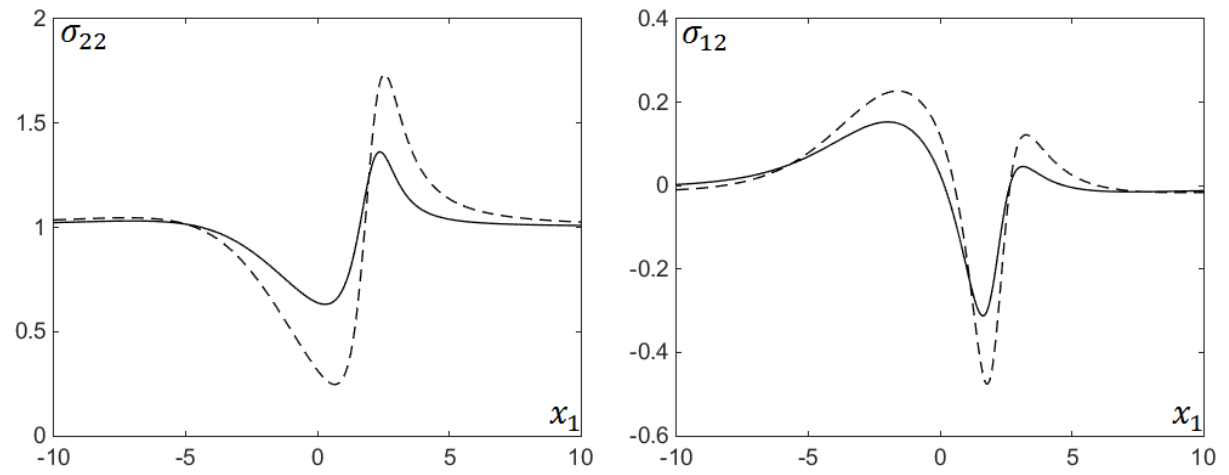
Puc. 21. $H = 5$, $\alpha = \pi/4$.



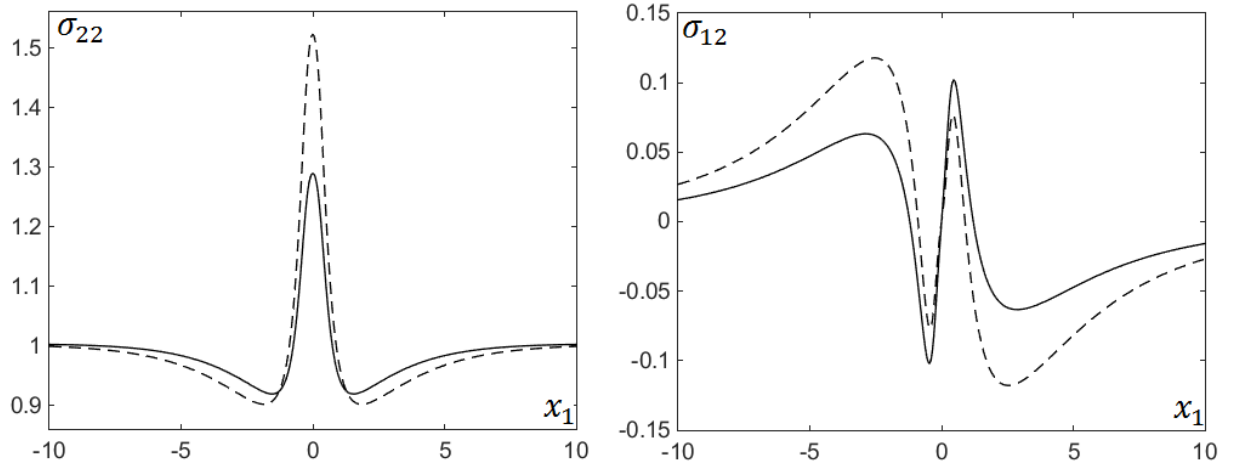
Puc. 22. $H = 5$, $\alpha = \pi/2$.



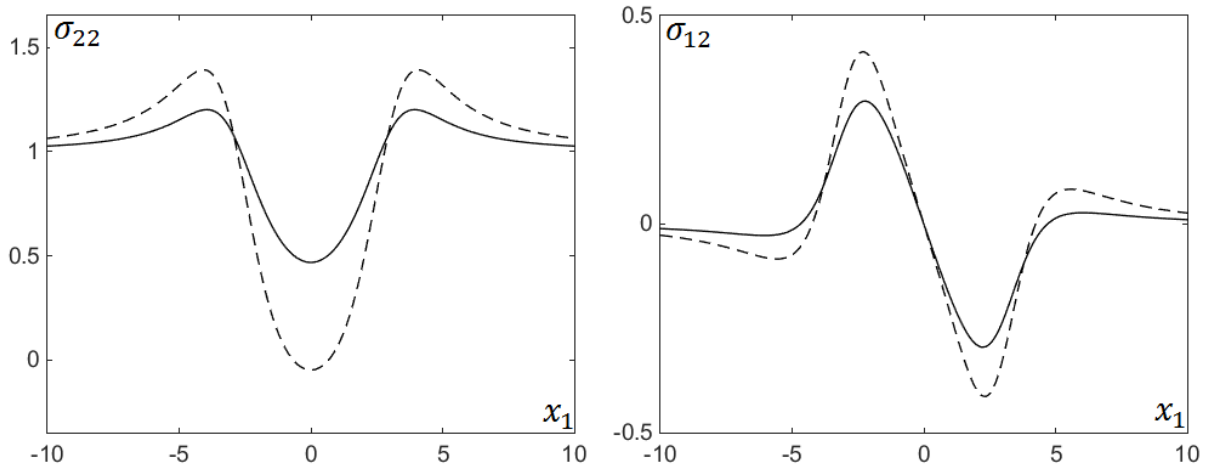
Puc. 23. $H = 3$, $\alpha = 0$.



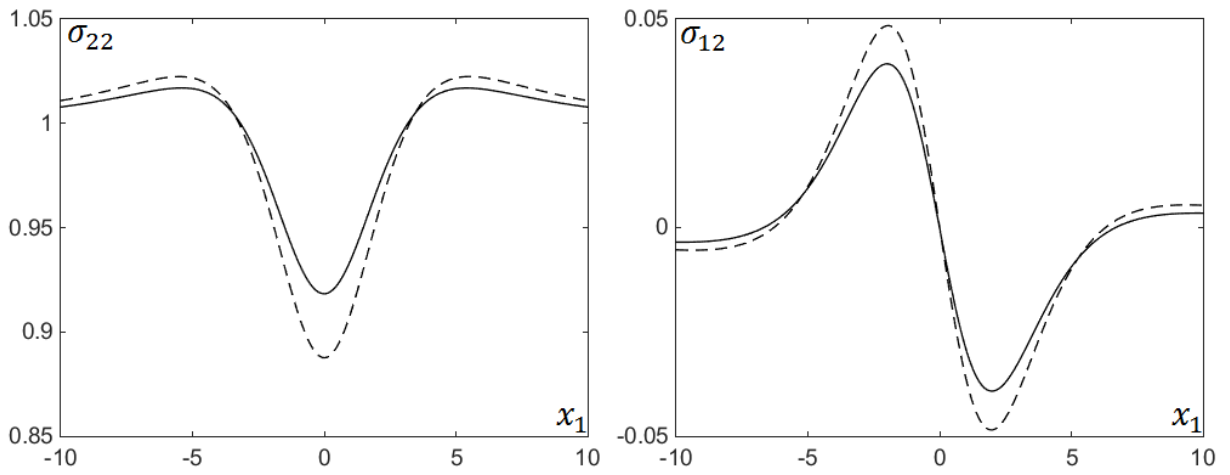
Puc. 24. $H = 3$, $\alpha = \pi/4$.



Puc. 25. $H = 3.5$, $\alpha = \pi/2$.



Puc. 26. $H = 2.01$, $\alpha = 0$.



Puc. 27. $H = 5$.

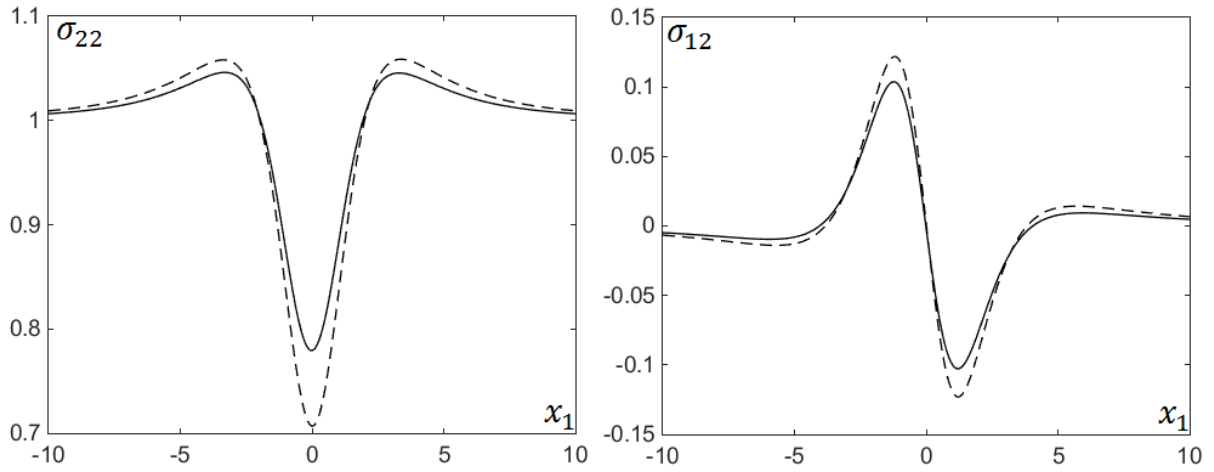


Рис. 28. $H = 3$.

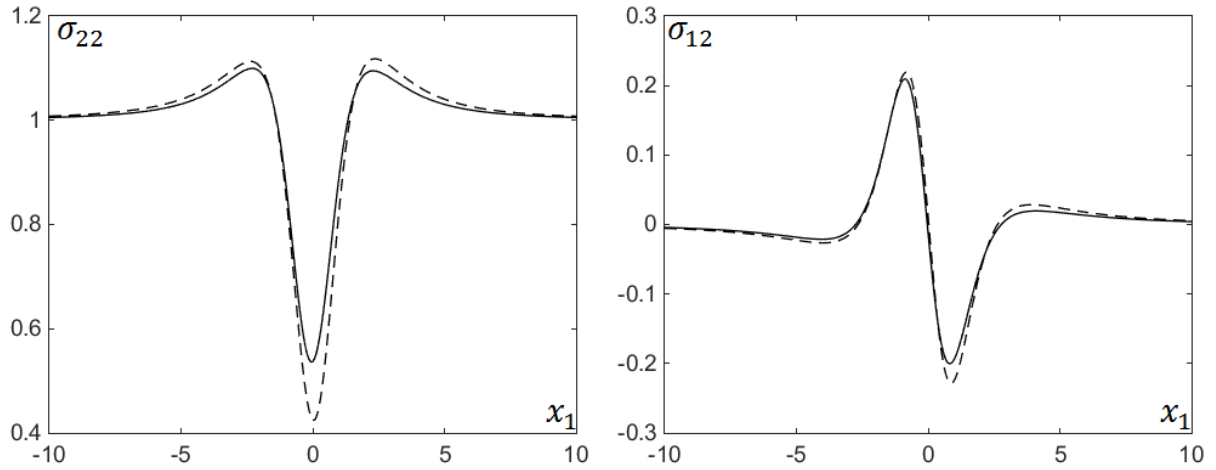


Рис. 29. $H = 2.01$.

По всем полученным графикам можно сделать следующие выводы: напряжения достигают своих наибольших и наименьших значений при большем значении параметра μ , т. е. когда отверстие расположено в более мягкой среде. Происходит стремление к асимптотам при удалении от отверстия. При изменении угла наклона осей эллиптического отверстия меняется характер распределения напряжений. В частности, можно заметить, что происходит нарушение симметрии, которая соблюдается при $\alpha = 0$. При приближении отверстия к границе раздела, т. е. при уменьшении H , происходит значительный по модулю рост максимальных значений напряжений.

Графики 20–26 (случай с трещиной) близки к результатам, полученным в работе [2], а графики 27–29 (случай с окружностью) совпадают с результатами, полученными в работе [22]. Это говорит о том, что полученное решение исходной задачи является корректным, так как согласуется с решениями полученными в частных случаях.

10. Заключение

В работе была рассмотрена задача определения и анализа напряжений неоднородной пластины с эллиптическим отверстием. Для решения задачи использован метод суперпозиции и метод комплексных потенциалов Колосова — Мусхелишвили. Задача была сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и для разрешения уравнения использовался численный метод коллокаций. Были выведены формулы для напряжений и перемещений, в частности, на линии раздела полуплоскостей. Выполнены расчеты напряжений на линии раздела для различных параметров упругости полуплоскостей, различного расстояния центра эллипса от линии раздела, а также ориентации эллипса в плоскости. Результаты, полученные в частных случаях с трещиной и круговым отверстием, совпали с результатами, полученными в работах, исследовавших данные примеры.

Список литературы

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.
2. Малькова Ю. В. Некоторые задачи для двухкомпонентной плоскости с криволинейными трещинами. СПб.: Издательский дом СПбГУ, 2008. 160 с.
3. Греков М. А. Слабо искривленная трещина около границы соединения двух различных материалов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика, механика, астрономия. 2008. Вып. 1. С. 93–101.
4. Craciun E. M., Barbu L. Compact closed form solution of the incremental plane states in a pre-stressed elastic composite with an elliptical hole // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2015. V. 95, P. 193–199.
5. Yu L. Y. et al Elastic analysis of a half plane with a circular cavity and its engineering application // Gongcheng Lixue/Engineering Mechanics. 2013. V. 30, P. 167–172.
6. Wang X. F. et al. A point dislocation interacting with an elliptical hole located at a Bi-material interface // Applied Mechanics and Materials. 2012. V. 151, P. 75–79.
7. Pyatigorets A. V., Mogilevskaya S. G., Marasteanu M. O. Linear viscoelastic analysis of a semi-infinite porous medium // International Journal of Solids and Structures. 2008. V. 45, P. 1458–1482.
8. Wang J., Crouch S. L., Mogilevskaya S. G. A complex boundary integral method for multiple circular holes in an infinite plane // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2003. V. 27, P. 789–802.
9. Kooi C. B., Verruijt A. Interaction of circular holes in an infinite elastic medium // Tunnelling and Underground Space Technology. 2001. V. 16, P. 59–62.
10. Kuang J. S., Wang Y. H. Analysis of interfacial cracks emanating from a hole in a bi-material plate // European Journal of Mechanics, A/Solids. 1999. V. 18, P. 465–479.
11. Ukadgaonker V. G., Awasare P. J. Interaction effect of rectangular hole and arbitrarily oriented elliptical hole or crack in infinite plate subjected to uniform tensile loading at infinity // Indian Journal of Engineering and Materials Sciences. 1999. V. 6, P. 125–134.
12. Zhang Y. G., Li J. P., Rao P. P. Elastic stress analysis of circular cavity expansion under a slope // Gongcheng Lixue/Engineering Mechanics. 2014. V. 31, P. 23–28.
13. Guo H., Liu G., Pi J. Stress analysis of an ellipse hole with a straight edge-crack by complex variable method // Gutu Lixue Xuebao/Acta Mechanica Solida Sinica. 2007. V. 28, P. 308–312.

14. Guo J., Liu G. Stress analysis for an elliptical hole with two straight cracks // Lixue Xuebao/Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2007. V. 39, P. 699–703.
15. Prasad P. et al. Green's function of a bimaterial problem with a cavity on the interface — Part I: Theory // Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME. 2005. V. 72, P. 389–393.
16. Engels H., Zakharov D., Becker W. The plane problem of an elliptically reinforced circular hole in an anisotropic plate or laminate // Archive of Applied Mechanics. 2001. V. 71, P. 601–612.
17. Salama M., Hasebe N. Thin plate bending of dissimilar half-planes with interface debonding emanating from an elliptical hole // International Journal of Fracture. 1995. V. 74, P. 199–218.
18. Ukadgaonker V. G., Patil D. B. Stress analysis of a plate containing two elliptical holes subjected to uniform pressures and tangential stresses on hole boundaries // Journal of engineering for industry. 1993. V. 115, P. 93–101.
19. Yuan-han W. Stress intensity factors of a plate with two cracks emanating from an arbitrary hole // Applied Mathematics and Mechanics. 1990. V. 11, P. 723–732.
20. Malkov V. M., Malkova Yu. V. Deformation of bi-material plane with elliptic hole // 2nd International Conference on Emission Electronics (ICEE). 2014. P. 1–5.
21. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967. 368 с.
22. Петрухин Р. Р., Малькова Ю. В. Двухкомпонентная плоскость с круговым отверстием, расположенным вблизи линии раздела // Процессы управления и устойчивость. 2015. Т. 2. № 1. С. 233–238.